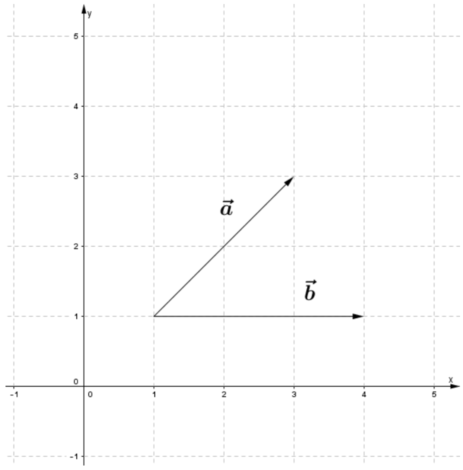
Studienkolleg Vektoren, SS 2017

1. Im nebenstehenden Bild sind zwei Repräsentanten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt.
   Berechnen Sie das Skalarprodukt
   (a) aus den Längen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und dem Winkel $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$.
   (b) aus den Koordinaten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.



2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Es gilt: $2\vec{a} - 3\vec{c} = 4\vec{b}$.
   Berechnen Sie den Vektor $\vec{c}$.

3. Ein Parallelogramm hat die Eckpunkte A $(1|3|6)$, B $(3|7|3)$, C $(8|7|5)$ und D.
   (a) Bestimmen Sie die Koordinaten von D und den Schnittpunkt der Diagonalen.
   (b) Berechnen Sie die Innenwinkel des Parallelogramms, sowie den Winkel, unter dem sich die Diagonalen schneiden.
   (c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms.
   (d) Untersuchen Sie, ob die Punkte G $\left(\frac{13}{4}|5|5\right)$ und H $(4|-1|5)$ innerhalb des Parallelogramms liegen.

4. Welche Punkte der x-Achse haben von P $(-6|3|4)$ den Abstand $d = 13$?

5. Ein Viereck hat die Eckpunkte A $(2|0|3)$, B $(4|4|4)$, C $(11|7|9)$ und D $(9|3|8)$.
   Untersuchen Sie, ob das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

6. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ haben die Koordinaten $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Berechnen Sie

   (a) das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$.

   (b) das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

7. Die Punkte A $(8|4|0)$, B $(0|6|2)$, C $(0|0|8)$ und D $(8|-1|5)$ sind Eckpunkte eines Vierecks.

   (a) Stellen Sie das Viereck in einem räumlichen Koordinatensystem dar.

   (b) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist.

   (c) Berechnen Sie die Größe des Flächeninhalts des Vierecks ABCD.

8. Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind. Geben Sie ggf. $\vec{c}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ an.

9. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Der Vektor $\vec{a}$ hat die Länge $|\vec{a}| = 4$ und schließt mit den positiven Koordinatenachsen die Winkel $\varphi_x = 120$, $\varphi_y = 45$ und $\varphi_z = 60$ ein. Bestimmen Sie die kartesischen Koordinaten von $\vec{a}$.

   (b) Bestimmen Sie die Länge des Vektors $\vec{b}$ und die Richtungswinkel des Vektors $\vec{b}$, die dieser mit den kartesischen Koordinatenachsen bildet.

10. Im Punkt A greifen folgende drei Kräfte an:

    $\overrightarrow{F_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ N, $\overrightarrow{F_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ N und $\overrightarrow{F_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ N.

    Berechnen Sie die Richtung (Vektor in Koordinatendarstellung) und Betrag der resultierenden Kraft $\overrightarrow{F_R}$.